## OPCIÓN A

**1.**.- Dada la función $\begin{cases} 3x^2+sen^2 x+2 & si \quad x\le 0 \\ \sqrt[3]{x}+2a\cos x & si \quad 0<x<\pi \\ \sqrt[3]{x+b}-2 & si \quad \pi\le x \end{cases}$

a) Hallar los valores de **a** y **b** para que **f(x)** sea continua en todo $\Re$ (explicar) **[1 punto]**

b) Estudia la derivabilidad en todo $\Re$ de la función **f(x)** con los valores de **a** y **b** obtenidos anteriormente **[1'5 puntos]**

*a )*

$$\begin{cases} f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=3\cdot 0^2+sen^2 0+2=0+sen\, 0+2=2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt[3]{0}+2a\cos 0=0+2a\cdot 1=2a \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=2\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=2a \Rightarrow a=1$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pi^-} f(x)=\sqrt[3]{\pi}+2\cdot 1\cos\pi=\sqrt[3]{\pi}+2(-1)=\sqrt[3]{\pi}-2 \\ f(\pi)=\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\sqrt[3]{\pi+b}-2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to\pi^-} f(x)=\sqrt[3]{\pi}-2=f(1)=\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\sqrt[3]{\pi+b}-2$$

$$\sqrt[3]{\pi}-2=\sqrt[3]{\pi+b}-2\Rightarrow\sqrt[3]{\pi}=\sqrt[3]{\pi+b}\Rightarrow\pi=\pi+b\Rightarrow b=0$$

*b )*

$$f'(x)=\begin{cases} 6x+2\, sen\, x\cos x & si \quad x<0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-2\, sen\, x & si \quad 0<x<\pi \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & si \quad \pi<x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f'(x)=6\cdot 0+2sen\, 0\cos 0=0+2\cdot 0\cdot 1=0 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{0^2}}-2\, sen\, 0=\dfrac{1}{0}-2\cdot 0\Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \\ \begin{cases} \lim_{x\to\pi^-} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}}-2\, sen\,\pi=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}}+0=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}} \\ \lim_{x\to\pi^+} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0\ne\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\infty\Rightarrow En\ x=0\ No\ es\ derivable$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x)=\lim_{x\to\pi^+} f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}}\Rightarrow En\ x=\pi\ Es\ derivable$$

**2.-** Calcular

$$a)\quad \int\left(5\sqrt[3]{x}-3x^3+\frac{2}{x^2}\right)dx \quad (0'75\ puntos) \qquad b)\int\frac{5}{(2x-3)^2+9}\,dx \quad (1'25\ puntos)$$

$$c)\quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cot\,g\ x\,dx \quad (0'5\ puntos)$$

$$a)\int\left(5\sqrt[3]{x}-3x^3+\frac{2}{x^2}\right)dx=5\int x^{\frac{1}{3}}dx-3\int x^3dx+2\int x^{-2}dx==5\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\cdot x^{\frac{1}{3}+1}-3\cdot\frac{1}{3+1}\cdot x^{3+1}+2\cdot\frac{1}{-2+1}\cdot x^{-2+1}$$

$$=5\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}-3\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4+2\cdot\frac{1}{-1}\cdot x^{-1}==\frac{15}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}-\frac{3}{4}\cdot x^4-2\cdot x^{-1}=\frac{15}{4}\cdot x\sqrt[3]{x}-\frac{3}{4}\cdot x^4-\frac{2}{x}+K$$

$b)$

$$I=\int\frac{5}{(2x-3)^2+9}\,dx=5\int\frac{1}{t^2+9}\,\frac{dt}{2}=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{9\left(\frac{t^2}{9}+1\right)}=\frac{5}{18}\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1}=\frac{5}{18}\int\frac{3\,du}{u^2+1}$$

$$2x-3=t\Rightarrow 2\,dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{2} \qquad\qquad \frac{t}{3}=u\Rightarrow t=3u\Rightarrow dt=3\,du$$

$$I=\int\frac{5}{(2x-3)^2+9}\,dx=\frac{15}{18}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{5}{6}\,arc\ tg\ u=\frac{5}{6}\,arc\ tg\left(\frac{t}{3}\right)=\frac{5}{6}\,arc\ tg\left(\frac{2x-3}{3}\right)+K$$

$c)$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\ x}{sen\ x}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{t}=[ln\ t]_{\frac{1}{2}}^{1}=ln\ 1-ln\ \frac{1}{2}=0-(ln\ 1-ln\ 2)=ln\ 2$$

$$sen\ x=t\Rightarrow cos\ x\,dx=dt\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=sen\ \frac{\pi}{2}=1\\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=sen\ \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

**3.-** Calcular la matriz **X** tal que **XA + 3B = C**, siendo

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$ (detalla todos los cálculos realizados)

**[2'5 puntos]**

$$XA=C-3B\Rightarrow XAA^{-1}=(C-3B)A^{-1}\Rightarrow XI=(C-3B)A^{-1}\Rightarrow X=(C-3B)A^{-1}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-4+6=2\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(adj\ A^{t}\right)\Rightarrow A^{t}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow adjA^{t}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} C-3B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 9\\ 12 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -5\\ -9 & 5\end{pmatrix}\\ A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right.\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-7 & -5\\ -9 & 5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-7 & -5\\ -9 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-18 & -16\\ -46 & -32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -8\\ -23 & -16\end{pmatrix}$$

**4.-** Dadas la rectas secantes $r_1:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=3-4\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{cases}\ (\lambda\in\Re)\quad y\quad r_2:\begin{cases}5x-y+z=2\\ -5x+y+z=0\end{cases}$ obtener las ecuaciones en forma continua y en forma paramétrica de la recta **s** que pasa por el punto de intersección de las rectas dadas y es perpendicular a ambas, explicando el procedimiento utilizado **[2'5 puntos]**

El vector director de la recta **s** lo hallaremos como el producto vectorial de los vectores de las dos rectas por ser perpendicular a ellas

$$r_2:\begin{cases}5x-y+z=2\\ -5x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow 2z=2\Rightarrow z=1\Rightarrow 5x-y+1=2\Rightarrow y=5x+1-2\Rightarrow y=-1+5x\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} r_1:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=3-4\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{cases}\\ r_2:\begin{cases}x=\mu\\ y=-1+5\mu\\ z=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}-1+\lambda=\mu\\ 3-4\lambda=-1+5\mu\\ -2+3\lambda=1\end{cases}\Rightarrow 3\lambda=3\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow -1+1=\mu\Rightarrow\mu=0\Rightarrow 3-4\cdot 1=-1+5\cdot 0\Rightarrow$$

$$-1=-1\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado\Rightarrow Punto\ P\ de\ intersección\Rightarrow P\begin{cases}x=-1+1=0\\ y=3-4\cdot 1=-1\\ z=-2+3\cdot 1=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_{r_1}}=(1,-4,3)\\ \overrightarrow{v_{r_2}}=(1,5,0)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_{r_1}}\times\overrightarrow{v_{r_2}}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=3\vec{j}+5\vec{k}+4\vec{k}-15\vec{i}=-15\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_s}=(-15,3,9)\equiv(-5,1,3)$$

**Continuación del Problema 4 de la Opción A**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (-5\ ,1\ ,3) \\ P(0\ ,-1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ecuación\ continua \Rightarrow s \equiv \dfrac{x-1}{-5} = y+1 = \dfrac{z-1}{3} \\ Ecuación\ paramétrica \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -5\beta \\ y = -1+\beta \\ z = 1+3\beta \end{cases} \end{cases}$$

## OPCIÓN B

**1.**.-a) Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones, justificando en cada caso si la función es creciente o decreciente en el punto indicado:

$$i)\quad f(x)=arc\ sen\,(2x)-tag\,(3x)\quad en\quad x=0$$

$$ii)\quad g(x)=\sqrt{e^{x^2-4}+cos\,(\pi x)}\quad en\quad x=2$$

**[1'5 puntos]**

b) Calcular el siguiente límite, explicando como se hace $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x\cdot(1-cos\ x)}{ln^3(x+1)}$ **[1 punto]**

a)

$i)$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2-\frac{1}{cos^2(3x)}\,3=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{3}{cos^2(3x)}\Rightarrow$$

$$f'(0)=\frac{2}{\sqrt{1-4\cdot 0^2}}-\frac{3}{cos^2(3\cdot 0)}=\frac{2}{\sqrt{1-0}}-\frac{3}{cos^2 0}=\frac{2}{1}-\frac{3}{1^2}=-1<0\Rightarrow Decreciente$$

$ii)$

$$g'(x)=\frac{2xe^{x^2-4}-\pi\ sen\,(\pi x)}{2\sqrt{e^{x^2-4}+cos\,(\pi x)}}\Rightarrow g'(2)=\frac{2\cdot 2\cdot e^{2^2-4}-\pi\ sen\,(2\pi)}{2\sqrt{e^{2^2-4}+cos\,(2\pi)}}=\frac{4\cdot e^{4-4}-\pi\cdot 0}{2\sqrt{e^{4-4}+1}}=\frac{4\cdot e^0-0}{2\sqrt{e^0+1}}$$

$$g'(2)=\frac{4\cdot 1}{2\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}>0\Rightarrow Creciente$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x\cdot(1-cos\ x)}{ln^3(x+1)}=\frac{sen\ 0\cdot(1-cos\ 0)}{ln^3(0+1)}=\frac{0\cdot(1-1)}{ln^3 1}=\frac{0\cdot 0}{0^3}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{cos\ x\cdot(1-cos\ x)+[-(-sen\ x)]\cdot sen\ x}{3\,ln^2(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\ x-cos^2\ x+sen^2 x}{3\,ln^2(x+1)}=\frac{cos\ 0-cos^2\ 0+sen^2 0}{3\,ln^2(0+1)}=$$

$$=\frac{cos\ 0-cos^2\ 0+sen^2 0}{3\,ln^2(0+1)}=\frac{1-1^2+0}{3\cdot 0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\ x-2\,cos\ x(-sen\ x)+2sen\ x\cdot cos\ x}{6\,ln\,(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\ x+4\ sen\ x\cdot cos\ x}{6\,ln\,(x+1)}=\frac{-sen\ 0+4\ sen\ 0\cdot cos\ 0}{6\,ln\,(0+1)}=$$

$$=\frac{0+4\cdot 0\cdot 1}{6\cdot 0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{-cos\ x+4\,(cos\ x\cdot cos\ x-sen\ x\cdot sen\ x)}{6\cdot\frac{1}{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-cos\ x+4\,(cos^2\ x-sen^2 x)}{6\cdot\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-cos\ x+4\ cos\,(2x)}{6\cdot\frac{1}{x+1}}=\frac{-cos\ 0+4\ cos\,(2\cdot 0)}{6\cdot\frac{1}{0+1}}=\frac{-1+4\cdot 1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

**2.-** Obtener razonadamente dos números positivos, de forma que se cumplan los siguientes requisitos:
i) La suma de ambos debe ser **60**
ii) El producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro resulte de valor máximo

**[2'5 puntos]**

Llamando **x** e **y** a los números

$$\begin{cases} x+y=60 \Rightarrow x=60-y \\ P=x^2y^3 \end{cases} \Rightarrow P=(60-y)^2y^3 \Rightarrow P'=\frac{dP}{dy}=2\cdot(-1)\cdot(60-y)y^3+3y^2(60-y)^2 \Rightarrow$$

$$P'=\frac{dP}{dy}=(60-y)\left[-2y^3+3y^2(60-y)\right]=(60-y)\left(-2y^3+180y^2-3y^3\right)=(60-y)\left(-5y^3+180y^2\right)$$

$$P'=5y^2(60-y)(-y+36)\Rightarrow P'=0\Rightarrow\begin{cases} y^2=0\Rightarrow y=0 \\ 60-y=0\Rightarrow y=60 \\ -y+36=0\Rightarrow y=36 \end{cases}$$

$$P''=5\left[2y(60-y)(36-y)-y^2(36-y)-y^2(60-y)\right]=5y\left[2(60-y)-y(36-y)-y(60-y)\right]$$

$$P''=5y\left[(2-y)\cdot(60-y)-y(36-y)\right]$$

$$\begin{cases} P''(0)=5\cdot0\cdot\left[(2-0)\cdot(60-0)-0\cdot(36-0)\right]=0\cdot(120-0)=0\Rightarrow Sin\ definición \\ P''(60)=5\cdot60\cdot\left[(2-60)\cdot(60-60)-60\cdot(36-60)\right]=300\cdot\left[-60\cdot(-24)\right]=300\cdot60\cdot24>0\Rightarrow Mínimo \\ P''(36)=5\cdot36\cdot\left[(2-36)\cdot(60-36)-36(36-36)\right]=180\cdot(-34)\cdot24<0\Rightarrow Máximo \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=36 \\ x=60-36=24 \end{cases}$$

**Ejercicio 3.-** Discutir la compatibilidad del siguiente sistema según los distintos valores del parámetro **m**: $\begin{cases} 3x+mz=1 \\ -x+my+2z=m \\ 2x+2z=1 \end{cases}$ **[2'5 puntos]**

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & m \\ -1 & m & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6m-2m^2\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow 6m-2m^2=0\Rightarrow 2m(3-m)=0\Rightarrow\begin{cases} m=0 \\ 3-m=0\Rightarrow m=3 \end{cases}$$

$$(Para\ todo)\forall m\in\Re-\{0,3\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sist.Comp.\ Deter\min ad$$

$Si\ m=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=-3\Rightarrow z=\frac{-3}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow$$

*Sistema Incompatible*

**Continuación del ejercicio 3 de la opción B**

$$Si\ m = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & 9 & 6 & 6 \\ -6 & 0 & -6 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible$$

**Ejercicio 4.-** Dada la recta $r : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \Re)$ y el punto **P(2 , - 2 , 3)** exterior a **r**

a) Hallar la ecuación en forma general del plano $\pi$ que los contiene, explicando el procedimiento utilizado **[1'5 puntos]**
b) Obtener las ecuaciones en forma paramétrica, en forma continua y como intersección de dos planos, de la recta s que pasa por P y es perpendicular al plano $\pi$, explicando el procedimiento utilizado **[1 punto]**

a) Para determinar el plano $\pi$ contamos con el vector director de la recta **r**, con el vector formado por el punto **P** y un punto **R** cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el vector que forma por el punto **P** y el punto **G**, genérico del plano, estos tres vectores son coplanarios (están contenidos en el mismo plano) y por ello el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por lo tanto el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación pedida.

$$R(-1\ ,0\ ,2)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (3\ ,-5\ ,2) \\ \overrightarrow{PR} = (-1\ ,0\ ,2) - (2\ ,-2\ ,3) = (-3\ ,2\ ,-1) \equiv (3\ ,-2\ ,1) \\ \overrightarrow{PR} = (x\ ,y\ ,z) - (2\ ,-2\ ,3) = (x-2\ ,y+2\ ,z-3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-4\,(x-2) + 3\,(y+2) - 15\,(z-3) + 6\,(z-3) + 5\,(x-2) - 6\,(y+2) = 0 \Rightarrow (x-2) - 3\,(y+2) - 9\,(z-3) = 0$$

$$\pi \equiv x - 3y - 9z + 19 = 0$$

b) El vector director de la recta **s** que se quiere obtener es el director del plano ya que es perpendicular a él.

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\ ,-3\ ,-9) \Rightarrow \begin{cases} Forma\ continua \Rightarrow s : x - 2 = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{-9} \\ Forma\ paramétrica \Rightarrow s : \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -2 - 3\mu \\ z = 3 - 9\mu \end{cases} \\ Intersección\ de\ planos \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 9x + z - 21 = 0 \end{cases} \end{cases}$$